جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر تحليل (4) لطلاب السنة الثانية رياضيات الفصل الأول للعام الدراسي 2017/2016	اسم الطالب : المدة : ساعة ونصف العلامة : 100

السؤال الأول: (17 علامة)

عرِّف متتالية كوشي في فضاء متري ثم أثبت أن كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي .

السؤال الثاني: (17 علامة)

عرِّف تكافؤ نظيمين على فضاء متجهي ثم أثبت أنه إذا كان N_1 و N_2 نظيمين متكافئين على فضاء متجهي V فإن المسافتين d_1 و d_2 المولدتان بالنظيمين N_1 و N_2 متكافئتان .

السؤال الثالث: (17 علامة)

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من $\mathbb{R}^n$ وكانت a نقطة من $\overline{A \cap B}$ وإذا فرضنا أن النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين ، فاثبت أن :

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

السؤال الرابع: (15 علامة)

إذا كانت f الدالة المعرفة بالشكل : $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x,y) = \frac{y^3 \cos x}{x^2+y^2}$

فاثبت أن : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

السؤال الخامس: (19 علامة)

اثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \; ; \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; ; \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

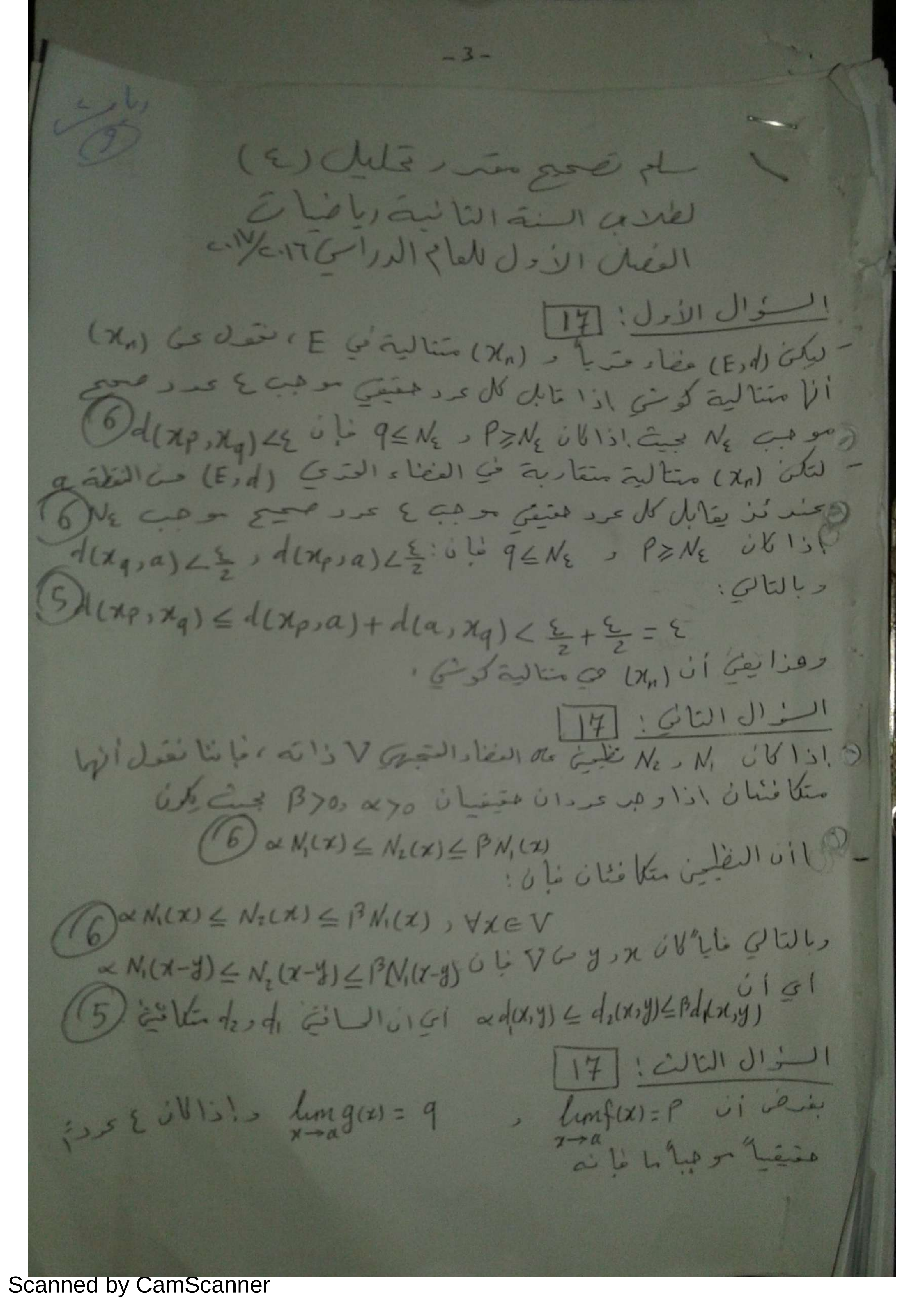
غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال السادس: (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $I = \iint_D x^2\,dx\,dy$ حيث D المنطقة المحدودة بنصفي الدائرتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ في المنطقة الواقعة فوق محور الفواصل .

حمص في 2017/1/25

د . عصام نسيم



سلم تصحيح مقرر تحليل (٤)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول: [17]

- ليكن (E,d) فضاء متريًا و (x_n) متتالية في E، نقول عن (x_n) أنها متتالية كوشي إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث إذا كان $p \geq N_\varepsilon$ و $q \leq N_\varepsilon$ فإن $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ (6)
- لتكن (x_n) متتالية متقاربة في الفضاء المتري (E,d) من النقطة a عندئذٍ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε (6)
إذا كان $p \geq N_\varepsilon$ و $q \leq N_\varepsilon$ فإن: $d(x_p, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ ، $d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2}$
وبالتالي:
$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (5)
وهذا يعني أن (x_n) هي متتالية كوشي.

السؤال الثاني: [17]

إذا كان N_1 و N_2 نظيمين على الفضاء المتجهي V ذاته، فإننا نقول أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان $\alpha > 0$، $\beta > 0$ بحيث يكون
$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ (6)
- أن النظيمين متكافئان فإن:
$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) , \forall x \in V$ (6)
وبالتالي فأيًا كان x و y من V فإن $\alpha N_1(x-y) \leq N_2(x-y) \leq \beta N_1(x-y)$
أي أن $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$ أي أن المسافتين d_1 و d_2 متكافئتين (5)

السؤال الثالث: [17]

بفرض أن $\lim_{x \to a} f(x) = p$ ، $\lim_{x \to a} g(x) = q$ وإذا كان ε عددًا حقيقيًا موجبًا ما فإنه

$$h\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0=h+0+\eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$h(h^2-k^2)-h(h^2+k^2)=\eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\eta(h,k)=\frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \quad (5)$$

وبما أن

$$\lim_{h\to 0}\eta(h,h)=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^3}{2\sqrt{2}\,h^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0 \quad (4)$$

فإنه لا يمكن للدالة η أن تتقارب من الصفر عندما $(h,k)\to(0,0)$

وبالتالي فإن f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$

السؤال السادس: **15**

بالانتقال الى الاحداثيات القطبية

$x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta \quad J=\rho$

$$I=\iint_D x^2\,dx\,dy=\iint_{D'}\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \quad (5)$$

$$I=\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_1^2\rho^3\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \quad (5)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{15}{8}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{15}{8}\left[(\pi+0)-(0+0)\right]=\frac{15\pi}{8} \quad (5)$$

د. عصام نسيم